

## 一、先想清楚：优惠券什么时候最有用？

每张优惠券在买每个商品时都能优惠 1 元，而且优惠券永久有效。

也就是说，假设现在手里有  $x$  张优惠券，那么买一个价格为  $a$  的商品时，需要支付：

$$\max(a - x, 0)$$

买完这个商品后，还会再获得一张优惠券。

所以越晚买的商品，能用的优惠券越多。

因此，一个非常自然的策略是：

**便宜的商品先买，贵的商品后买。**

因为后面的商品能享受到更多优惠券，更应该把更贵的商品放到后面。

## 二、为什么一定可以按价格从小到大买？

考虑两个相邻购买的商品，价格分别是  $x$  和  $y$ ，且  $x > y$ 。

假设买第一个时有  $c$  张优惠券，那么买第二个时有  $c + 1$  张优惠券。

如果先买贵的  $x$ ，再买便宜的  $y$ ，花费是：

$$\max(x - c, 0) + \max(y - (c + 1), 0)$$

如果交换顺序，先买便宜的  $y$ ，再买贵的  $x$ ，花费是：

$$\max(y - c, 0) + \max(x - (c + 1), 0)$$

后者不会更大。

直观理解就是：

**多出来的那一张优惠券应该优先给更贵的商品使用。**

所以如果购买顺序中出现了“贵的在前、便宜的在后”，交换它们不会让答案变差。

不断交换后，就可以得到一个最优顺序：

**所有商品按价格从小到大购买。**

### 三、把题目化简

现在假设商品已经排序：

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

如果一开始不买优惠券，那么：

- 买第 1 个商品时，有 0 张额外获得的优惠券；
- 买第 2 个商品时，有 1 张额外获得的优惠券；
- 买第 3 个商品时，有 2 张额外获得的优惠券；
- ...
- 买第  $i$  个商品时，有  $i - 1$  张额外获得的优惠券。

所以第  $i$  个商品，先被“购买过程中获得的优惠券”抵消掉  $i - 1$  元。

它还剩下的有效价格是：

$$b_i = \max(a_i - (i - 1), 0)$$

这一步非常关键。

原题就变成了：

现在有若干个有效价格  $b_i$ 。

一开始可以买  $k$  张优惠券，每张优惠券价格为  $w$ 。

买了  $k$  张优惠券之后，每个商品都能再被减少  $k$  元。

因此总花费是：

$$kw + \sum_{i=1}^n \max(b_i - k, 0)$$

问题变成：

**选择一个非负整数  $k$ ，让总花费最小。**

#### 四、什么时候应该继续买优惠券？

现在只看  $b_i$  这个新问题。

假设已经决定买  $k$  张优惠券。

如果再多买一张优惠券，会多花  $w$  元。

但是它能让所有满足  $b_i > k$  的商品各少付 1 元。

也就是说，如果当前还有  $cnt$  个商品没有被优惠到 0，那么多买一张优惠券可以省下  $cnt$  元。

所以：

- 如果  $cnt > w$ ，多买一张优惠券很划算；
- 如果  $cnt < w$ ，多买一张优惠券不划算；
- 如果  $cnt = w$ ，买不买都一样。

因此，我们应该一直买优惠券，直到：

**还能继续产生有效优惠的商品数量不超过  $w$ 。**

这就是本题最核心的贪心判断。

#### 五、最优的初始优惠券数量是多少？

把所有正的  $b_i$  从大到小排序。

例如：

$$b_{p_1} \geq b_{p_2} \geq b_{p_3} \geq \dots$$

当购买的初始优惠券数量  $k$  较小时，很多商品还没有被优惠到 0。

随着  $k$  增大，较小的  $b_i$  会先变成 0，仍然能继续产生优惠的商品数量逐渐减少。

根据上一节的判断：

我们需要找到一个位置，使得继续增加  $k$  时，能够受益的商品数量大约变成  $w$ 。

因此最优的  $k$  可以取：

**所有正的  $b_i$  中第  $w$  大的值。**

如果正数  $b_i$  的数量不足  $w$  个，那么一开始买优惠券不划算，取  $k = 0$  即可。

## 六、完整算法

1. 将所有商品价格从小到大排序。
2. 对每个位置  $i$ ，计算  $b_i = \max(a_i - (i - 1), 0)$ 。
3. 找出所有正的  $b_i$ 。
4. 如果正的  $b_i$  数量至少为  $w$ ，令  $k$  为第  $w$  大的  $b_i$ ；否则令  $k = 0$ 。
5. 答案为  $k w + \sum \max(b_i - k, 0)$ 。

## 七、样例 2 解释

原数据：

4 3  
4 4 3 3

先按价格从小到大排序：

依次购买时，第  $i$  个商品已经天然拥有  $i - 1$  张优惠券，所以有效价格为：

商品位置	原价格	过程优惠	有效价格
1	3	0	3
2	3	1	2
3	4	2	2
4	4	3	1

所以得到：

$$b = [3, 2, 2, 1]$$

每张优惠券价格  $w = 3$ 。

正的  $b_i$  从大到小为：

$$3, 2, 2, 1$$

第 3 大是 2，所以一开始买 2 张优惠券。

总花费：

$$2 \times 3 + \max(3 - 2, 0) + \max(2 - 2, 0) + \max(2 - 2, 0) + \max(1 - 2, 0)$$

也就是：

$$6 + 1 = 7$$

答案为 7。

## 八、复杂度

排序需要  $O(n \log n)$ 。

其余部分都是线性处理。

总时间复杂度为  $O(n \log n)$ ，空间复杂度为  $O(n)$ 。

## 九、核心总结

这道题的关键不是模拟优惠券，而是两次转化：

第一，把商品按价格从小到大买，让自动获得的优惠券尽量作用在更贵的商品上。

第二，把第  $i$  个商品变成有效价格  $b_i = \max(a_i - i + 1, 0)$ ，然后只需要考虑一开始买多少张优惠券。

最后利用“多买一张优惠券的成本是  $w$ ，收益是还没被优惠到 0 的商品数量”来确定最优购买数量。